Unterstützungstutorium grundlegender Mathematik

Dr. Lena Schend

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Informatik

21. Dezember 2016

Aufgabe Gruppenhomomorphismen

Wir erinnern uns, dass die reellen Zahlen mit der Addition $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe bilden. Desweiteren sind die reellen Zahlen mit der Multiplikation $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ○ $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), x \mapsto x^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- ○ $f : (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot) \to (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot), x \mapsto x^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- ○ f ist weder bezüglich $(\mathbb{R}, +)$ noch bezüglich $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe Rekursive Algorithmen

Gegeben sei der folgende Algorithmus

```
int algo(int n){
    if(n ≤ 0){ return 0; }
    else{
        i = 1;
        if(n = 1){ return 1; }
        else{ return algo(n − i)·n; }
    }
}
```

a) Was berechnet algo(n)? (Mehrfachnennung möglich!)

- ☐ $\text{algo}(n) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1}(n-i), & n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- ☐ $\text{algo}(n) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1}(n-i), & n \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- ☐ $\text{algo}(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} i, & n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- ☐ $\text{algo}(n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} i, & n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe Rekursive Algorithmen

Gegeben sei der folgende Algorithmus

```
int algo(int n){
    if(n ≤ 0){ return 0; }
    else{
        i = 1;
        if(n = 1){ return 1; }
        else{ return algo(n − i)·n; }
    }
}
```

b) Wieviele Operationen werden für beliebiges $n \geq 1$ bei einem Durchlauf durchgeführt?

c) Welche worst-case Laufzeit hat der Algorithmus?

○ $\Theta(n)$ ○ $\Theta(n \log(n))$ ○ $\Theta(n^2)$

Aufgabe Rekursive Algorithmen

a) Es sei die Rekursionsgleichung $T(n) = 4T(n/12) + f(n)$ mit $f(n) \in \Theta(n^3)$ gegeben. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ○ $T(n) \in \Theta(n^3)$
- ○ $T(n) \in \Theta(n^3 \log(n))$
- ○ $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_{12}(4)}\right)$

b) Es sei die Rekursionsgleichung $T(n) = 4T(n/2) + f(n)$ mit $f(n) \in \Theta(1)$ gegeben. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ○ $T(n) \in \Theta(1)$
- ○ $T(n) \in \Theta(\log(n))$
- ○ $T(n) \in \Theta(n^2)$

c) Es sei die Rekursionsgleichung $T(n) = 27T(n/3) + f(n)$. Welche Laufzeit muss $f(n)$ haben, damit $T(n) \in \Theta(n^3)$ gilt?

- ○ $f(n) \in \Theta(n^3)$
- ○ $f(n) \in \Theta(n^2)$
- ○ $f(n) \in \Theta(n)$

Aufgabe Vollständige Induktion

Gegeben sei die folgende Aussage:

"Jeder glatte Euro Betrag, der mindestens 8 Euro beträgt, kann ohne Wechselgeld mit Münzen im Wert 3 Euro und 5 Euro beglichen werden."

Welche der folgenden Formalisierungen gibt die obige Aussage exakt wieder?

- ○ $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists m, n \in \mathbb{N})[x = 3m + 5n]$
- ○ $(\forall x \in \mathbb{N}_{\geq 8})(\exists m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0})[x = 3m + 5n]$
- ○ $(\exists x \in \mathbb{N}_{\geq 7})(\forall m, n \in \mathbb{N})[x = 3m + 5n]$

Aufgabe Vollständige Induktion

Wir zeigen die formalisierte Aussage mit vollständiger Induktion und zwar mit einem Schritt von x nach $x+3$.

Induktionsanfang: Die ersten drei zugelassenen x sind die Zahlen $8, 9, 10$

- $x = 8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$ ✔
- $x = 9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$ ✔
- $x = 10 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2$ ✔

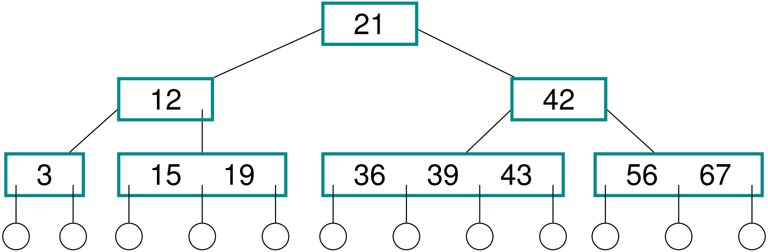
Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass $x = 3m + 5n$ für $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ gilt.

Induktionsschritt: $x \to x+3$

Vervollständigen Sie den Beweis!

Aufgabe B-Bäume

Betrachten Sie den folgenden Baum.



Welche Höhe hat der Baum?

- ○ $h = 3$
- ○ $h = 4$

Ist dies ein gültiger B-Baum?

- ○ Ja.
- ○ Nein.

Aufgabe B-Bäume

Welche Schlüssel müssen getauscht werden, damit der Baum ein gültiger B-Baum ist?

Welche Ordnung hat der nun gültige B-Baum?

- ○ $m = 3$
- ○ $m = 4$
- ○ $m = 5$

Aufgabe Funktionen

Es seien $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}, k \mapsto k^2 - 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{5} - 2$ zwei Funktionen.
Es sei weiterhin $A = \{3, 8, 48, 99\}$.

a) Bestimmen Sie das Bild von A unter f und g.

- ○ $f(A) = \{8, 36, 2302, 9800\}$ ○ $g(A) = \{-\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{38}{5}, \frac{89}{5}\}$
- ○ $f(A) = \{2, 24, 38, 96\}$ ○ $g(A) = \{\frac{2}{5}, \frac{10}{5}, \frac{20}{5}, \frac{36}{5}\}$
- ○ $f(A) = \{8, 63, 2303, 9800\}$ ○ $g(A) = \{\frac{1}{5}, \frac{31}{5}, \frac{58}{5}, \frac{61}{5}\}$

b) Bestimmen Sie das Urbild von A unter f und g.

- ○ $f^{-1}(A) = \{2, 3, 8, 9\}$ ○ $g^{-1}(A) = \{25, 55, 250, 505\}$
- ○ $f^{-1}(A) = \{2, 3, 7, 10\}$ ○ $g^{-1}(A) = \{25, 50, 255, 500\}$
- ○ $f^{-1}(A) = \{2, 4, 6, 9\}$ ○ $g^{-1}(A) = \{25, 50, 250, 505\}$